Алгоритм 4

Обозначения

В данной работе рассматривается и имплементируется предложенный Огита и Аишима итеративный метод уточнения сингулярных значений для полного сингулярного разложения [2].

Рассмотрим данный итеративный метод уточнения сингулярных значений для матрицы с действительными коэффициентами ,   
. В случае будет решаться задача для транспонированной матрицы , поскольку сингулярное разложение и совпадает [ссылка].

Пусть – сингулярные числа. Полным сингулярным разложением матрицы будем считать такое разложение

матрицы и ортогональные, матрица диагональная и .

Далее будем считать, что , то есть все сингулярные значения простые. Также обозначает спектральную норму, т. е. . – единичная матрица. В тексте различаются приблизительные значения и посчитанные значения соответственно

Ускорение алгоритма

Известно, что вычисление сингулярного разложения преимущественно ограниченно матричным умножением, что и является основной вычислительной сложностью алгоритма. Есть несколько подходов к матричному умножению с высокой точностью: XBLAS [3], быстрые и точные вычисления скалярного произведения [4] и произведений матриц [5], основанные на error-free transformations.

Рассматриваемый алгоритм использует такие соотношения:

1. В силу ортогональности

1. В силу ортогональности V:
2. В силу диагональности A:

Пусть и приближенные значения матриц и . Корректирующими матрицами и будем называть такие матрицы, которые удовлетворяют равенствам и . Пусть определяется как

Полагаем, что мало и , тогда обе матрицы и невырожденные и можно разложить в ряд Тейлора обратные матрицы

Подставив в (1), получим

из последнего следует

Аналогичное выражение можно получить, подставив в (2)

Проделаем те же операции и подставим и в уравнение (3)

Проведем оценку остаточных членов:

Опустим слагаемые второго порядка у , , в (4), (5), (6) и получим систему матричных уравнений для и

Таким образом, остается решить систему уравнений и найти . Эффективнее всего это сделать, представив матрицы как блочные:

Тогда первое уравнение системы можно переписать:

третье уравнение системы перепишется так

Очевидно, что диагональные элементы матриц и достаточно просто выражаются

Третье уравнение системы для диагональных элементов выглядит так

**Замечание.** В общем случае возможно равенство , однако на самом деле и это невязки с точки зрения ортогональности *U* и *V*, поэтому зачастую на практике , и .

Остается найти недиагональные значения матриц и . Рассмотрим систему уравнений (7) и (8):

Умножим третье и четвертое уравнения системы на и соответственно,

Сложив полученные уравнения и подставив второе уравнение, получим

В найденное выражение подставим первое уравнение системы

Аналогичное выражение можно получить и для

Таким образом, получаем выражения для недиагональных элементов

Все эти рассуждения применимы для нахождения элементов остальных матриц . Например, совместив уравнения (7*e*) и (8), значения матрицы получатся

Из (7*b*) уравнения выражается :

И значения элементов соответственно

Благодаря условию (7*с*) определяется .

**Замечание.** В этом алгоритме мы полагаем, что для всех пар (*i*, *j*). Если же это условие не выполняется, то существует подход для решения этой проблемы, описанный в [6].

|  |
| --- |
| **Вход:**,  **Выход:**  ,    # счет приблизительных сингулярных значений  for to *n* do    # счет диагональных элементов матриц и  for to *n* do  f  g g  # Вычисление недиагональных элементов и  for to *n* do  for j to *n* do  if i != j then    b  f  g  endif  # Вычисление  for to *n* do  for to m do  f  # Вычисление  for to m do  for to n do  f  # Вычисление  for to m do  for to m do  f  # Обновление значений , |

1. Полный алгоритм итеративного уточнения сингулярных значений.

Представленный алгоритм обладает квадратичной сходимостью, это следует из следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть , при . , и , определяется как . Аналогично определим и , , где и это результат работы описанного алгоритма уточнения сингулярных значений. Если выполняется условие

тогда

Доказательство: [2].

Воспользуемся этой теоремой. Пусть , где . Тогда учитывая, что и , получаем

Применяя теорему, найдем, что

Таким, образом требуемая арифметическая точность алгоритма составляет около десятичных цифр. Хотя арифметическая точность в двух последних строках алгоритма составляет *d* десятичных цифр. Это происходит ввиду того, что только первые *d* десятичных цифр и точны, и только первые *d* десятичных цифр и могут повлиять на результат [1]. В итоге, вычислительная стоимость алгоритма (количество требуемых операций) с точностью и *d* десятичных цифр соответственно  
 до и [1].

Список литературы

1. Uchino Y., Terao T., Ozaki K.: Acceleration of iterative refinement for singular value decomposition / Numerical Algorithms. — 2024. — № 95. — С. 979–1009.
2. Ogita, T., Aishima, K.: Iterative refinement for singular value decomposition based on matrix multiplication / J. Comput. Appl. —2020. — №369. – 112512.
3. X. S. Li, J. W. Demmel, D. H. Bailey, G. Henry, Y. Hida, J. Iskandar, W. Kahan, S. Y. Kang, A. Kapur, M. C. Martin, B. J. Thompson, T. Tung, and D. Yoo: Design, implementation and testing of extended and mixed precision BLAS, ACM Trans. / Math. Software. —2002. — № 28. — С. 152–205.
4. T. Ogita, S. M. Rump, S. Oishi: Accurate sum and dot product / SIAM J. Sci. Comput. —2005. — № 26:6. — С. 1955–1988.
5. K. Ozaki, T. Ogita, S. Oishi, S. M. Rump: Error-free transformations of matrix multiplication by using fast routines of matrix multiplication and its applications / Numerical Algorithms. —2012. — 59:1. — C. 95-118.
6. T. Ogita, K. Aishima: Iterative refinement for symmetric eigenvalue decomposition / Japan J. Indust. Appl. Math. — 2018, № 35:3. — C. 1007–1035.